

Simulación de redes de difracción de apertura mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo

Jorge Francés Monllor^{1 *}, Cristian Neipp¹, Manuel Pérez-Molina, Mariela L. Álvarez y Augusto Beléndez

¹ *Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal. Universidad de Alicante. Carretera de San Vicente del Raspeig S/N CP:03690 San Vicente del Raspeig (Alicante)*

1. Introducción

El método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (DFDT) ha sido ampliamente utilizado en el campo del electromagnetismo, más concretamente en la región de microondas. En el área de la ingeniería óptica, este método no ha sido utilizado con mucha frecuencia debido los inconvenientes que implican utilizar longitudes de onda de nanómetros. Simular regiones alejadas de micras es muy común en este tipo de aplicaciones e inviable computacionalmente con formulaciones básicas de las DFDT. En este trabajo se muestran los resultados obtenidos mediante el método DFDT en el estudio de la difracción de aperturas. La incorporación de diferentes algoritmos, como la transformación de campo cercano a lejano ha permitido simular mallados de tamaño reducido y calcular la distribución de irradiancia en regiones de campo lejano o de Fraunhofer.

2. Formulación del método de las DFDT

El método de las FDTD se basa en la aproximación de las derivadas espaciales y temporales por las diferencias centrales. Para ello se recurre a una discretización tanto en el espacio como en el tiempo de las componentes de campo magnético y eléctrico. Esta formulación se detalla con más detalle en [1]-[3]. Cada componente del campo se sitúan en el espacio en una celda, denominada celda de Yee (véase figura 1). Partimos de las ecuaciones diferenciales de Maxwell mostradas en la ec. (1-3).

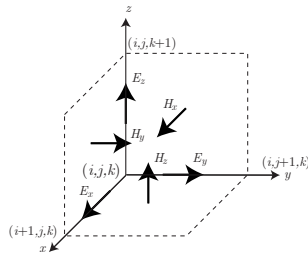


Figura 1: Celda de Yee [3].

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{D}(w) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_0^* \cdot \mathbf{E}(w), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

donde las variables del campo y del vector desplazamiento han sido normalizadas respecto a la impedancia intrínseca ($\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$). Desarrollando las ecuaciones de Maxwell podemos obtener las

* e-mail: jfmonllor@ua.es

seis componentes del campo involucradas el problema tridimensional para propagación en espacio libre [1],[2]. Tomando la aproximación de las diferencias centrales tanto a las derivadas espaciales como temporales de cada una de las ecuaciones del campo, y teniendo en cuenta la posición en la celda de Yee de cada una de las componentes, se obtendrían seis nuevas ecuaciones. Por comodidad, se mostrará la correspondiente a D_z , y de manera análoga se podrían obtener el resto de las ecuaciones:

$$D_z|i, j, k + 1/2^{n+1/2} = D_z|i, j, k + 1/2^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta x \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(H_y|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n-1/2} - H_y|_{i-1/2, j, k+1/2}^{n-1/2} - H_x|_{i, j+1/2, k+1/2}^{n-1/2} + H_x|_{i, j-1/2, k+1/2}^{n-1/2} \right). \quad (4)$$

Donde cada punto del espacio se referencia con la siguiente nomenclatura $(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$, donde i, j y k son enteros y son los índices para las dimensiones del espacio (x, y, z) . La variable entera n está relacionada con el tiempo de la forma $t_n = n\Delta t$. La relación entre Δt y Δx deben de cumplir la denominada condición de Courant, para que el algoritmo sea estable.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{p}c_0}. \quad (5)$$

donde se asume una celda cúbica de aristas iguales ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$) y p es el número de dimensiones involucradas en la simulación (tres para el caso tridimensional). En los límites de nuestra red de simulación, surgen unas reflexiones indeseadas debido a que los campos de las zonas externas no son conocidos y aproximados de manera arbitraria como nulos. El problema de las condiciones de contorno en los extremos del mallado se ha resuelto mediante la incorporación de las condiciones de frontera (ABC-*Absorbing Boundary Conditions*). En concreto, se ha recurrido a las ABCs de Berenger [1],[4]-[5] denominadas PMLs (Perfectly Matched Layers). Esta herramienta se basa en añadir unas capas en los extremos de la red de simulación que contenga pérdidas para cada una de las componentes del campo involucradas. Estas pérdidas se modelan a partir de unas constantes dieléctricas (ϵ^*) y de permeabilidad (μ^*).

Para aplicaciones ópticas, las longitudes de onda empleadas son del orden de nanómetros, lo que conlleva unas resoluciones temporales y espaciales muy reducidas. Para simular montajes ópticos, en los cuales se quiere estudiar diferentes puntos del espacio alejados de la fuente, se necesitarían mallados grandes, en consecuencia el coste computacional aumentaría exponencialmente. Para resolver este inconveniente, se ha recurrido a la transformación de campo cercano a lejano. Este formalismo permite propagar los campos en una superficie (S') a cualquier punto del espacio, sin tener que extender la red de simulación hasta dichos puntos. De esta forma, se pueden fijar unas dimensiones reducidas para el mallado que únicamente albergue la región de fuentes y calcular los campos alejados de la fuente mediante la transformación. Para ello, partimos de la expresión del potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \frac{e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}}}{R} dS', \quad (6)$$

donde $r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ es la distancia euclídea ente los puntos de la región de fuentes \mathbf{r}' y \mathbf{r} el punto del espacio en el cual se desea calcular el campo. El término \mathbf{J}_S se corresponde con las fuentes de corriente y el término $e^{-j\mathbf{k}\mathbf{R}}/R$ es la función de Green en espacio libre. Desarrollando esta expresión y realizando diferentes operaciones matemáticas [1], podemos llegar a la siguiente expresión, la cual es introducida en el algoritmo DFDT:

$$E_z|_{i,j,k}^n = \frac{1}{\pi} \sum_{i'} \sum_{j'} \frac{r_x}{R_{\Delta x}} \left[\frac{E_z|_{i',j',k'}^{n-2R_{\Delta x}} - E_z|_{i',j',k'}^{n-1-2R_{\Delta x}}}{\Delta t} + \frac{E_z|_{i',j',k'}^{n-2R_{\Delta x}}}{2R_{\Delta x}} \right] \quad (7)$$

Donde la distancia R ha sido redondeada al entero más próximo de la forma $R \cong \Delta x R_{\Delta x}$. Como se aprecia en la ecuación 7, el campo lejano se obtiene calculando las contribuciones del campo en cada punto de la apertura en la región de campo lejano. Además, se incluye un retardo para cada una de dichas contribuciones en función de la distancia. El lector puede encontrar más información al respecto en [1],[2] y [6].

	1 rendija	2 rendijas	N rendijas	circulo
$I(\theta)$	$I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$	$4I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 \cos^2 \alpha$	$\frac{I(0)}{N^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$	$I(0) \left[\frac{2J_1(k a \sin \theta)}{k a \sin \theta}\right]^2$

Tabla 1: Irradiancias teóricas para los experimentos de una rendija, dos rendijas, N rendijas y apertura circular. Donde $\beta = kb/2\sin\theta$ y $\alpha = kd/2\sin\theta$.

3. Resultados

Se han escogido sistemas ópticos sencillos para el estudio de la difracción en la región de Fraunhofer. Los diferentes elementos simulados se muestran en la figura 2. La longitud de onda de trabajo es de 633 nm y el periodo espacial de $\Delta x = \lambda/10$. Para poder estudiar el fenómeno de la difracción en campo lejano, debemos de alejarnos de la región de campo cercano. La distancia a la cual calculamos la propagación de campo cercano a campo lejano debe satisfacer la condición de Fraunhofer $F = a^2/L\lambda \ll 1$, donde a es la anchura de la apertura y L es la distancia entre el plano donde se sitúa la apertura y el punto de observación. Para todas las simulaciones se ha escogido una distancia de $L = 4000\Delta x$ cumpliendo la condición establecida ($F = 0,0625 \ll 1$). Mediante la transformación de campo cercano a lejano se han obtenido los puntos a lo largo del eje x a $z = 4000\Delta x$. Las irradiancias teóricas[8] para cada uno los experimentos mostrados en la figura 2, se muestran en la tabla 1. Los resultados de las simulaciones son comparados con los valores analíticos en la figura 3.

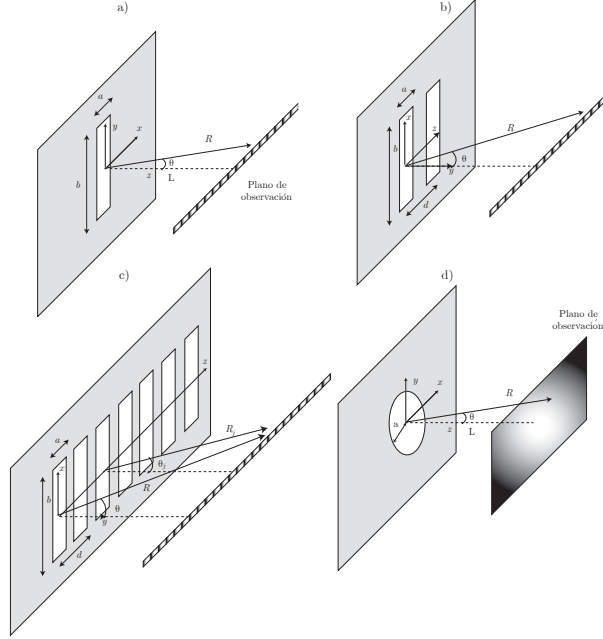


Figura 2: Geometrías de los sistemas utilizados. a) Rendija única. b) Doble rendija o experimento de Young. c) Múltiples rendijas ($N = 7$). d) Abertura circular.

4. Conclusiones

En este trabajo se muestra la aplicación del método de las DFDT a la simulación de sistemas ópticos sencillos. La incorporación de formalismos al algoritmo como las PMLs y la transformación de campo cercano a lejano, han permitido simular estos sistemas con mallados de tamaños reducidos. Los resultados obtenidos coinciden en gran medida con los valores analíticos esperados, por lo que los resultados avalan la exactitud del método.

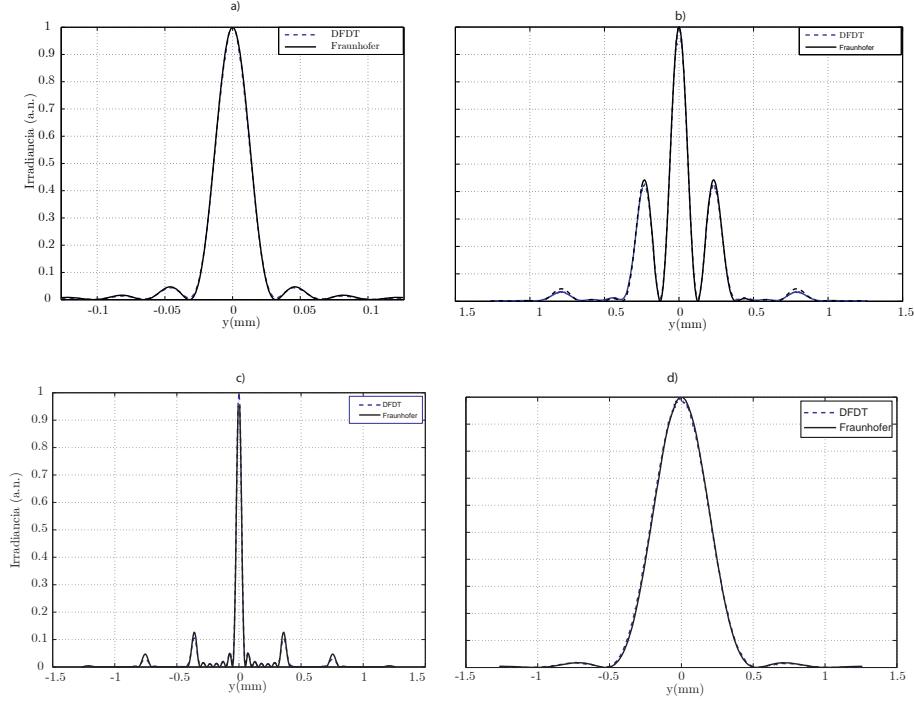


Figura 3: Comparativa entre los resultados numéricos y analíticos de las irradiancias normalizadas. a) Única rendija con $a = 80\Delta x$. Simulación de $100 \times 100 \times 80$ celdas. b) Doble rendija con $a = 50\Delta x$ y $d = 100\Delta x$. Simulación de $100 \times 80 \times 120$ celdas. c) Múltiples rendijas con $N = 7$ y $a = 50\Delta x$ y $d = 70\Delta x$. Simulación de $100 \times 50 \times 650$ celdas. d) Abertura circular de radio $a = 30\Delta x$. Simulación de $120 \times 80 \times 120$ celdas.

Agradecimientos: Parte de este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (proyecto FIS2008- 05856-Co0-02)

Bibliografía

- [1] D. N. Sullivan, *Electromagnetic simulation using the FDTD method* (IEEE Press Editorial Board, 2000).
- [2] A. Taflové, *Computational electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (Artech House Publishers, 1995).
- [3] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. On Antennas and Propagation*, **17**, p. 585-589 (1996).
- [4] J.P. Berenger, "A perfectly matched layer fo the absorption of electromagnetic waves", *J. Comput. Phys.*, **127**, p. 185-200, (1994).
- [5] J.P. Berenger, "Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Comput. Phys.*, **127**, p. 363-379, (1995).
- [6] A. Taflové, K.R. Umanshankar, " A novel method for analyze electromagnetic scattering of complex objects", *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, **24**, p. 397-405, (1986).
- [7] J. De Moerloose, D. De Zutter, " Surface integral representation radiation boundary condition for the FDTD method", *IEEE Trans. On Antennas and Propagation*, **45**, p. 1655-1663, (1997).
- [8] E. Hetch, *Óptica* (Pearson Addison Wesley, 2003).